

Sections planes de surfaces. ANNALES

Exercice 1 :

Antille Guyane Sept 2009

L'annexe est à rendre avec la copie

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la surface S_1 d'équation $z = x^2 + y^2$, et la surface S_2 d'équation $z = xy + 2x$.

Partie A

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x = 2$, E_1 l'intersection de la surface S_1 et du plan $\mathcal{P}$ et E_2 l'intersection de la surface S_2 et du plan $\mathcal{P}$.

En **annexe**, le plan $\mathcal{P}$ est représenté muni du repère $(A ; \vec{j}, \vec{k})$ où A est le point de coordonnées $(2 ; 0 ; 0)$.

- 1) a) Déterminer la nature de l'ensemble E_1 .
b) Déterminer la nature de l'ensemble E_2 .
- 2) a) Représenter les ensembles E_1 et E_2 sur la feuille **annexe**.
b) Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ donner les coordonnées des points d'intersection B et C des ensembles E_1 et E_2 .

Partie B

On pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante :

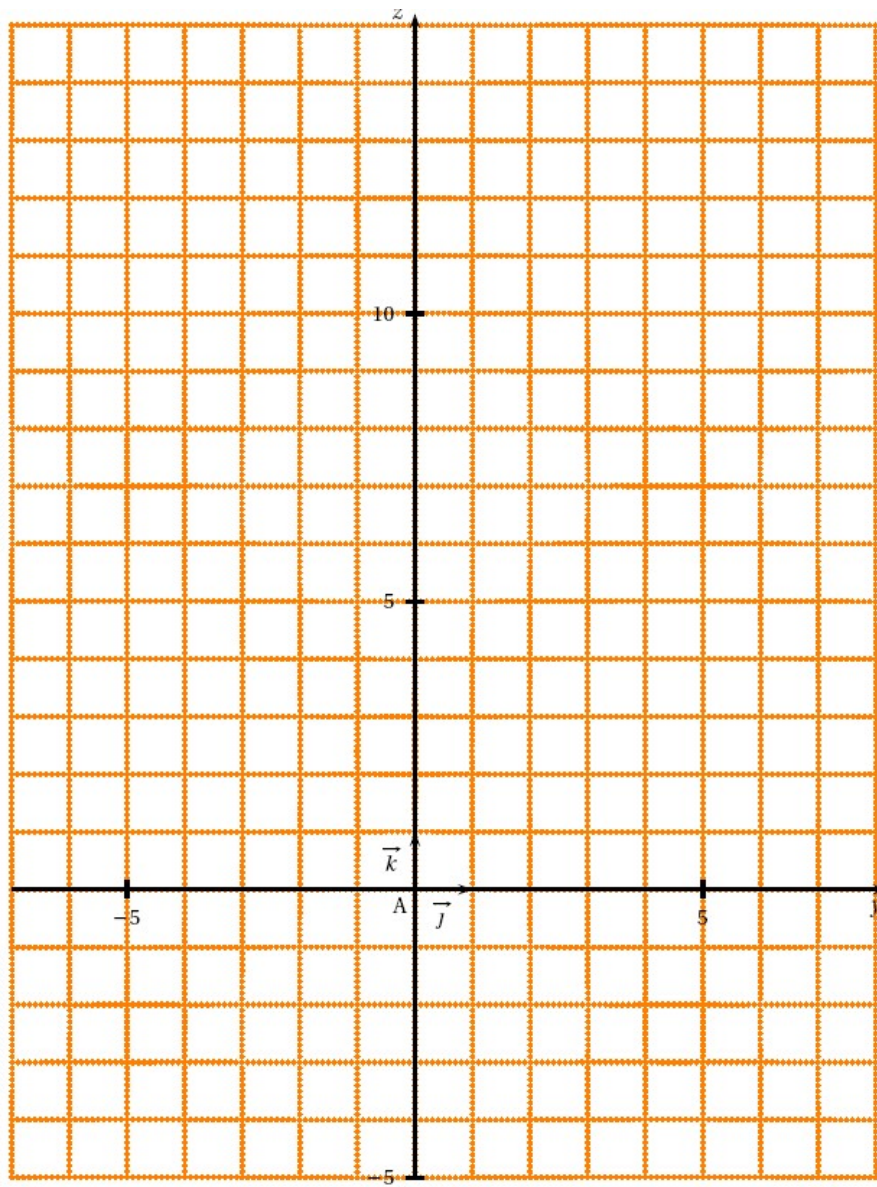
« soient a , b et c des entiers avec a premier. Si a divise bc alors a divise b ou a divise c . »

L'objectif de cette partie est de déterminer les points d'intersection $M(x ; y ; z)$ des surfaces S_1 et S_2 où y et z sont des entiers relatifs et x un nombre premier.

On considère un tel point $M(x ; y ; z)$.

- 1) a) Montrer que $y(y - x) = x(2 - x)$.
b) En déduire que le nombre premier x divise y .
- 2) On pose $y = kx$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
a) Montrer que x divise 2, puis que $x = 2$.
b) En déduire les valeurs possibles de k .
- 3) Déterminer les coordonnées possibles de M et comparer les résultats avec ceux de la Partie A, question 2b)

Annexe



Exercice 2 :**Pondichéry avril 2011****Partie A**

On considère, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, la surface $\mathcal{S}$ d'équation :

$$z = (x - y)^2.$$

- 1) On note $\mathcal{E}_1$ l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $z = 0$.
Déterminer la nature de $\mathcal{E}_1$. On note $\mathcal{E}_2$ l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $x = 1$.
Déterminer la nature de $\mathcal{E}_2$.

Partie B

On considère, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, la surface $\mathcal{S}'$ d'équation :

$$z = xy.$$

- 1) On note $\mathcal{E}_3$ l'intersection de $\mathcal{S}'$ avec le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $z = 0$.
Déterminer la nature de $\mathcal{E}_3$
- 2) On note $\mathcal{E}_4$ l'intersection de $\mathcal{S}'$ avec le plan $\mathcal{P}_3$ d'équation $z = 1$.
Déterminer la nature de $\mathcal{E}_4$.

Partie C

On note $\mathcal{E}_5$ l'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{S}'$.

Dans cette partie, on souhaite démontrer que le seul point appartenant à $\mathcal{E}_5$ dont les coordonnées sont des entiers naturels est le point $O(0; 0; 0)$.

On suppose qu'il existe un point M appartenant à $\mathcal{E}_5$ et dont les coordonnées x , y et z sont des entiers naturels.

- 1) Montrer que si $x = 0$, alors le point M est le point O .
- 2) On suppose dorénavant que l'entier x n'est pas nul.
 - a) Montrer que les entiers x , y et z vérifient $x^2 - 3xy + y^2 = 0$.
En déduire qu'il existe alors des entiers naturels x' et y' premiers entre eux tels que $x'^2 - 3x'y' + y'^2 = 0$.
 - b) Montrer que x' divise y'^2 , puis que x' divise y' .
 - c) Établir que y' vérifie la relation $1 - 3y' + y'^2 = 0$.
 - d) Conclure.

Exercice 3 :**Amérique du Sud Nov 2008**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit D la droite passant par le point A de coordonnées $(0 ; 0 ; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(1 ; 1 ; 0)$ et soit D' la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = t' \\ y = -t' \\ z = -2 \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble S des points de l'espace équidistants de D et de D' .

1) Une équation de S

a) Montrer que D et D' sont orthogonales et non coplanaires.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite D .

Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x ; y ; z)$ et H le projeté orthogonal de M sur D . Montrer que $\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{-x+y}{2} ; \frac{x-y}{2} ; 2-z \right).$$

En déduire MH^2 en fonction de x , y et z .

Soit K le projeté orthogonal de M sur D' . Un calcul analogue au précédent permet d'établir que : $MK^2 = \frac{(x+y)^2}{2} + (2+z)^2$, relation que l'on ne demande pas de vérifier.

c) Montrer qu'un point M de coordonnées $(x ; y ; z)$ appartient à S si et seulement si $z = -\frac{1}{4}xy$.

2) Étude de la surface S d'équation $z = -\frac{1}{4}xy$

a) On coupe S par le plan (xOy) . Déterminer la section obtenue.

b) On coupe S par un plan P parallèle au plan (xOy) .

Quelle est la nature de la section obtenue ?

c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*

On coupe S par le plan d'équation $x + y = 0$. Quelle est la nature de la section obtenue ?

Exercice 4 :

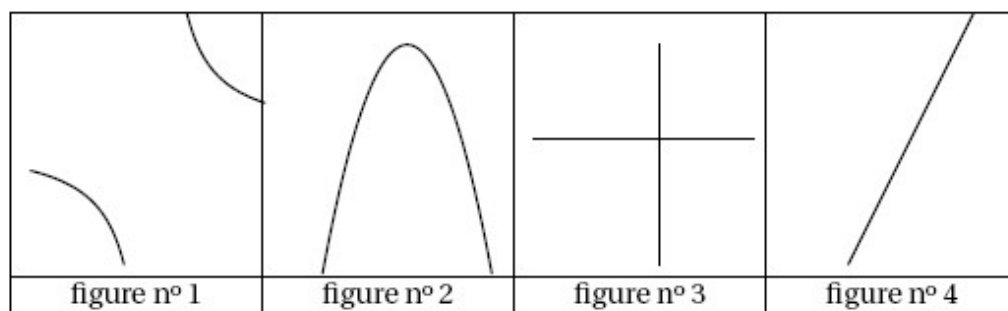
Centre étrangers juin 2009

- 1) On note (E) l'équation $3x + 2y = 29$ où x et y sont deux nombres entiers relatifs.
 - a) Déterminer un couple d'entiers solution de l'équation (E) .
 - b) Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) .
 - c) Préciser les solutions de l'équation (E) pour lesquelles on a à la fois $x \geq 0$ et $y \geq 0$;
- 2) Intersections d'un plan avec les plans de coordonnées
 L'espace est muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 2y = 29$.
 - a) Démontrer que $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe (Oz) de vecteur directeur $\vec{k}$.
 - b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les axes (Ox) et (Oy) de vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
 - c) Faire une figure et tracer les droites d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les trois plans de coordonnées.
 - d) Sur la figure précédente, placer sur la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et (xOy) , les points dont les coordonnées sont à la fois entières et positives.

3) Étude d'une surface

S est la surface d'équation $4z = xy$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les figures suivantes représentent les intersections de S avec certains plans de l'espace.



- a) S_1 désigne la section de la surface S par le plan (xOy) .
 Une des figures données représente S_1 laquelle ?
- b) S_2 désigne la section de S par le plan $\mathcal{R}$ d'équation $z = 1$.
 Une des figures données représente S_2 , laquelle ?
- c) S_3 désigne la section de S par le plan d'équation $y = 8$.
 Une des figures données représente S_3 , laquelle ?
- d) S_4 désigne la section de S par le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x + 2y = 29$ de la question 2)
 Déterminer les coordonnées des points communs à S_4 et $\mathcal{P}$ dont l'abscisse x et l'ordonnée y sont des entiers naturels vérifiant l'équation $3x + 2y = 29$.

Exercice 5 :**La Réunion juin 2009**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) Soient F le point de coordonnées $\left(0 ; 0 ; \frac{1}{4}\right)$ et P le plan d'équation $z = -\frac{1}{4}$.

On note $d(M, P)$ la distance d'un point M au plan P .

Montrer que l'ensemble (S) des points M de coordonnées $(x ; y ; z)$ qui vérifient $d(M, P) = MF$ a pour équation $x^2 + y^2 = z$.

- 2) a) Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble (S) avec le plan d'équation $z = 2$?
b) Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble (S) avec le plan d'équation $x = 0$?

Représenter cette intersection dans le repère $(O ; \vec{j}, \vec{k})$.

- 3) Dans cette question, x et y désignent des nombres entiers naturels.
a) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7 ?
b) Démontrer que 7 divise $x^2 + y^2$ si et seulement si 7 divise x et 7 divise y .
4) *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Existe-t-il des points qui appartiennent à l'intersection de l'ensemble (S) et du plan d'équation $z = 98$ et dont toutes les coordonnées sont des entiers naturels ? Si oui les déterminer.

Exercice 6 :

Pondichéry avril 2010

Les parties A et B peuvent, dans leur quasi-totalité, être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans cette partie, on se propose d'étudier des couples (a, b) d'entiers strictement positifs, tels que :

$$a^2 = b^3$$

Soit (a, b) un tel couple et $d = \text{PGCD}(a, b)$. On note u et v les entiers tels que $a = du$ et $b = dv$.

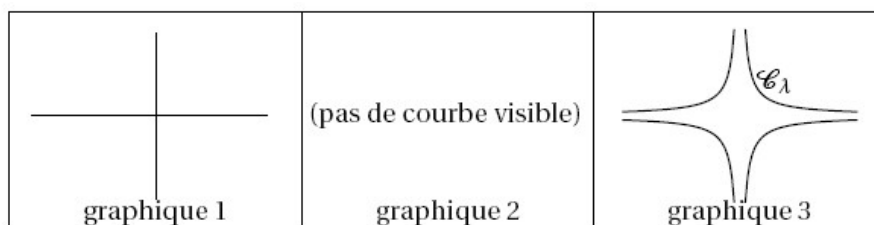
- 1) Montrer que $u^2 = dv^3$.
- 2) En déduire que v divise u , puis que $v = 1$.
- 3) Soit (a, b) un couple d'entiers strictement positifs.
Démontrer que l'on a $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.
- 4) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Montrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0 \pmod{7}$ ou $n \equiv 1 \pmod{7}$.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la surface S d'équation $x^2 \times y^2 = z^3$.

Pour tout réel λ , on note C_λ la section de S par le plan d'équation $z = \lambda$.

- 1) Les graphiques suivants donnent l'allure de C_λ tracée dans le plan d'équation $z = \lambda$, selon le signe de λ .
Attribuer à chaque graphique l'un des trois cas suivants : $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, et justifier l'allure de chaque courbe.



- 2) a) Déterminer le nombre de points de C_{25} dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.
- b) *Pour cette question, on pourra éventuellement s'aider de la question 3 de la partie A.*
Déterminer le nombre de points de C_{2010} dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs