Les similitudes

Table des matières

1 Rappels sur les nombres complexes **3**
1.1 Expression d'un nombre complexe 3
1.2 Représentation d'un nombre complexe 3
1.3 Opérations sur les conjugués, les modules et les arguments 4
1.4 Application des complexes en géométrie 4

2 Transformations élémentaires **5**
2.1 Définition 5
2.2 Isométrie 5
2.3 La translation 6
2.3.1 Définition et propriétés 6
2.3.2 Fonction complexe associée 7
2.4 La rotation 7
2.4.1 Définition et propriétés 7
2.4.2 Fonction complexe associée 8
2.4.3 Exemple 8
2.5 La réflexion 9
2.5.1 Définition et propriétés 9
2.5.2 Fonction complexe associée 10
2.6 L'homothétie 10
2.6.1 Définition et propriétés 10
2.6.2 Fonction complexe associée 11
2.6.3 Exemple 11

3 Similitude **12**
3.1 Définition 12
3.2 Conséquences 12
3.3 Propriétés 13
3.3.1 Le produit scalaire 13
3.3.2 Les angles géométriques 13
3.3.3 Repère orthogonal 13
3.3.4 Conséquences 13

4 Écriture complexe d'une similitude **13**
4.1 Similitude et triangle 13
4.2 Écriture complexe d'une similitude 14

5 Similitudes directes et indirectes **15**
5.1 Définitions . . . 15
5.2 Théorème . . . 16

6 Similitudes directes **17**
6.1 Propriétés d'une similitude directe . . . 17
6.2 Comment définir une similitude directe ? . . . 18
6.2.1 Théorème . . . 18
6.3 Figures clés de la similitude . . . 19

7 Configuration de cercles sécants **20**
7.1 Théorème . . . 20
7.2 Application . . . 21

1 Rappels sur les nombres complexes

1.1 Expression d'un nombre complexe

- Forme algébrique :

  $z = a + ib$

  avec $a = \Re(z)$ partie réelle de z et $b = \Im(z)$ partie imaginaire de z.

- Forme trigonométrique :

  $z = r\, e^{i\theta} = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = r\, e^{i\theta}$

  avec $r = |z|$ module de z et $\theta = \arg(z)$ argument de z

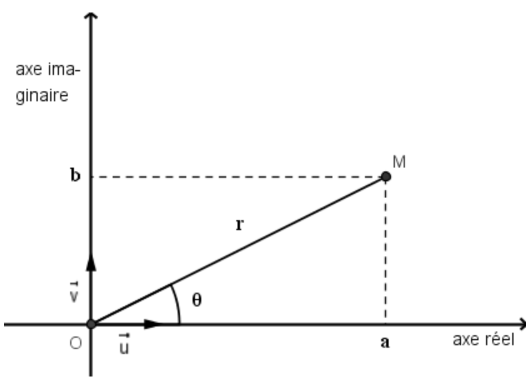
- Formules de passage d'uneériture à l'autre :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{et} \quad \cos\theta = \frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{b}{r}$$

- Complexe conjugué

  $\overline{z} = a - ib$ ou $\overline{z} = r\, e^{-i\theta}$ on a alors $z\,\overline{z} = |z|^2$

1.2 Représentation d'un nombre complexe



- Le plan muni du repère orthogonal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est appelé le **plan complexe**.
- $z = a + ib$ est représenté par le point M de coordonnées cartésiennes (a, b)
- $z = r\, e^{i\theta}$ est représenté par le point M de coordonnées polaires (r, θ)
- On dit que M est l'image de z, et que z est **l'affixe** du point M. On note alors $M(z)$.

Conséquence Le point M' d'affixe le complexe conjugué de z, $\overline{z}$ est alors de symétrique par rapport à l'axe des abscisses du point M.

1.3 Opérations sur les conjugués, les modules et les arguments

Propriété 1 : Opérations sur les conjugués, modules et arguments.

- Le conjugué de la somme et du produit ne pose pas de problème.
  En effet, on a :

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad , \quad \overline{z \times z} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \; (z' \neq 0) \quad , \quad \overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$$

- Le module du produit est le produit des modules mais pour l'addition, on ne peut rien dire.
  On a :

$$|z \times z'| = |z| \times |z'| \quad , \quad |z^n| = |z|^n$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad , \quad |\overline{z}| = |z|$$

Attention : $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$

- L'argument du produit est la somme des argument. De même le quotient des arguments est la différence des arguments.

$$\arg z \times z' = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi} \quad , \quad \arg z^n = n \arg z \pmod{2\pi}$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \pmod{2\pi} \quad , \quad \arg \overline{z} = -argz \pmod{2\pi}$$

1.4 Application des complexes en géométrie

- Soit 2 points A et B d'affixes respectives z_A et z_B. On a alors :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A \quad \text{et} \quad AB = |z_B - z_A|$$

- Soit 2 vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ d'affixes respectives z et z'. On a alors :

  1) $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \pmod{2\pi}$

  2) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** si : $\left(\dfrac{z'}{z}\right)$ est réel

  3) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **perpendiculaires** si : $\left(\dfrac{z'}{z}\right)$ est imaginaire pur.

- Soit quatre points $A(z_A)$, $B(z_B)$, $A'(z_{A'})$ et $B'(z_{B'})$. On a alors :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \arg\left(\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\right) \pmod{2\pi}$$

Remarque : Nous pouvons résumer par un schéma l'intervention des nombres complexes en géométrie.

$$\boxed{\text{Propriétés géométriques}} \longrightarrow \boxed{\textbf{Traduction}} \longrightarrow \boxed{\text{Relations entre affixes}}$$

$$\boxed{\text{Calculs dans } \mathbb{C}} \longrightarrow \boxed{\textbf{Traduction}} \longrightarrow \boxed{\text{Nouvelle prop.géométriques}}$$

2 Les transformations élémentaires et les fonctions complexes associées

2.1 Définition

Définition 1 : Une transformation du plan est une bijection du plan dans lui-même. À tout point M, on associe un unique point M', et tout point M' a un unique antécédent.
Si T est la transformation, on note T^{-1} la transformation réciproque.

$$M \xrightarrow[T^{-1}]{T} M' \qquad \text{avec} \qquad T(M) = M' \quad \text{et} \quad T^{-1}(M') = M$$

Exemple : La translation, la rotation,la symétrie centrale, la réflexion ou l'homothétie sont des transformations. Par contre la projection orthogonale n'est pas une transformation car une fois le point projeté, on ne peut plus revenir en arrière : l'antécédent n'est pas unique.

Remarque : La transformation qui au point M associe lui-même s'appelle l'identité. Elle est notée : Id

2.2 Isométrie

Définition 2 : Une isométrie est une transformation que conserve les distances. Soit i une isométrie :

$$\begin{cases} A \xrightarrow{\ i\ } A' \\ B \xrightarrow{\ i\ } B' \end{cases} \quad \text{on a alors :} \quad A'B' = AB$$

Remarque :

- Les isométries élémentaires sont : les translations, les rotations, les symétries centrales et les réflexions.
- On distingue deux sortes d'isométrie :
  1) **Les déplacements** : isomètries que conservent les angles orientés :

$$(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

  On range dans cette catégorie : les translations et les rotations

2) **Les antidaplacements** : isométries qui changent les angles orientés en leur opposé.

$$(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}) = -(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

On range dans cette catégorie : les réflexions et les symétries glissées

➪ L'image d'une droite par une isométrie est une droite. L'image d'un cercle par une isométrie est un cercle de même rayon.

Propriétés : Une isométrie conserve :

➪ Les distances : $A'B' = AB$

➪ Les aires : $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$

➪ Le parallèlisme : si $(D)//(\Delta)$ alors $(D')//(\Delta')$

➪ L'orthogonalité : si $(D) \perp (\Delta)$ alors $(D') \perp (\Delta')$

➪ Les angles géométriques : $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$

➪ Le milieu : si $I = m[AB]$ alors $I' = m[A'B']$

➪ L'alignement : si A, B et C sont alignés alors A', B' et C' le sont aussi.

➪ Le contact : si I est l'intersection des droites (D) et (Δ) alors I' est l'intersection de (D') et (Δ')

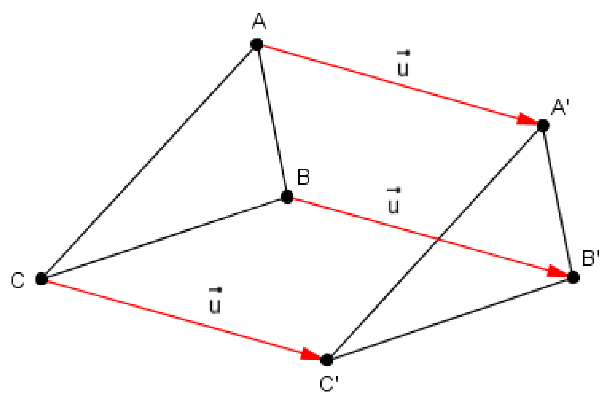
2.3 La translation

2.3.1 Définition et propriétés

Définition 3 : Une translation t de vecteur $\vec{u}$ est une transformation définie par :

$$M \xrightarrow{t} M' \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

Exemple : Image d'un triangle



Propriétés :

➪ Pour tous points A et B, on a : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$

➪ La translation n'admet pas de point fixe.

➪ La translation réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

➪ L'image (D') d'une droite (D) par une translation est :

1. $(D')//(D)$ si la direction de (D) est différente de $\vec{u}$
2. $(D') = (D)$ si (D) et $\vec{u}$ ont même direction.

2.3.2 Fonction complexe associée

Si le vecteur $\vec{u}(b)$ de la translation a pour affixe b, alors l'image $M'(z')$ du point $M(z)$ par la translation t, verifie :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$
$$z' - z = b$$
$$z' = z + b$$

Conclusion : La fonction complexe associée à la tranlation est de la forme

$$z' = z + b$$

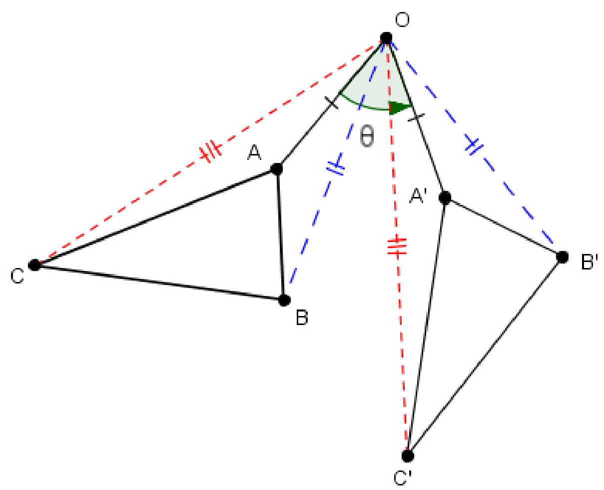
2.4 La rotation

2.4.1 Définition et propriétés

Définition 4 : Une rotation r de centre Ω et d'angle θ est une transformation définie par :

$$M \xrightarrow{r} M' \quad \text{tel que} \quad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \quad \text{et} \quad \Omega M' = \Omega M$$

Exemple : Image d'un triangle ($\theta = \frac{\pi}{3}$)



Propriétés :

➪ La rotation possède un point invariant : son centre.

➪ Une rotation de centre Ω d'angle $\frac{\pi}{2}$ correspond à un quart de tour direct noté Q_Ω.

➪ Une rotation de centre Ω d'angle $-\frac{\pi}{2}$ correspond à un quart de tour indirect noté Q'_Ω.

- Une rotation de centre Ω et d'angle π correspond à une symétrie centrale de centre Ω noté S_Ω.
- L'image (D') d'une droite (D) est une droite telle que : (D') et (D) forme un angle θ.

2.4.2 Fonction complexe associée

Soit le centre $\Omega(\omega)$ et l'angle θ de la rotation, alors l'image $M'(z')$ du point $M(z)$ par la rotation r, verifie :

$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{alors} \quad |z'-\omega| = |z-\omega| \quad \text{donc} \quad \left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \quad (1)$$

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \quad \text{alors} \quad \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta \quad (2)$$

De (1) et (2) on en déduit que :

$$\begin{aligned}\frac{z'-\omega}{z-\omega} &= e^{i\theta}\\ z'-\omega &= e^{i\theta}(z-\omega)\\ z' &= e^{i\theta}z + \omega - e^{i\theta}\omega\end{aligned}$$

en posant $b = \omega - e^{i\theta}\omega$, on obtient

$$z' = e^{i\theta}z + b$$

Remarque :

- Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ alors on a : $z' = iz + b$.
- Si $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ alors on a : $z' = -iz + b$.
- Si $\theta = \pi$ alors on a : $z' = -z + b$.

2.4.3 Exemple

Soit la rotation de centre Ω définie par :

$$z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,i$$

Déterminer l'angle de la rotation et l'affixe de Ω.

Pour déterminer l'angle θ de la rotation, il faut déterminer :

$$\arg\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = \frac{2\pi}{3}$$

en effet :

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pour déterminer l'affixe du centre Ω, il faut résoudre l'équation au point fixe :

$$\begin{aligned}
\omega &= \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)\omega+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\,i\\
2\omega &= (-1+\sqrt{3}\,i)\omega+\sqrt{3}+3i\\
\omega(3-\sqrt{3}\,i) &= \sqrt{3}+3i\\
\omega &= \frac{\sqrt{3}+3i}{3-\sqrt{3}\,i}\\
&= \frac{-\sqrt{3}\,i^2+3i}{3-\sqrt{3}\,i}\\
&= \frac{i(3-\sqrt{3}\,i)}{3-\sqrt{3}\,i}\\
&= i
\end{aligned}$$

Conclusion : La rotation est d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et de centre $\Omega(i)$

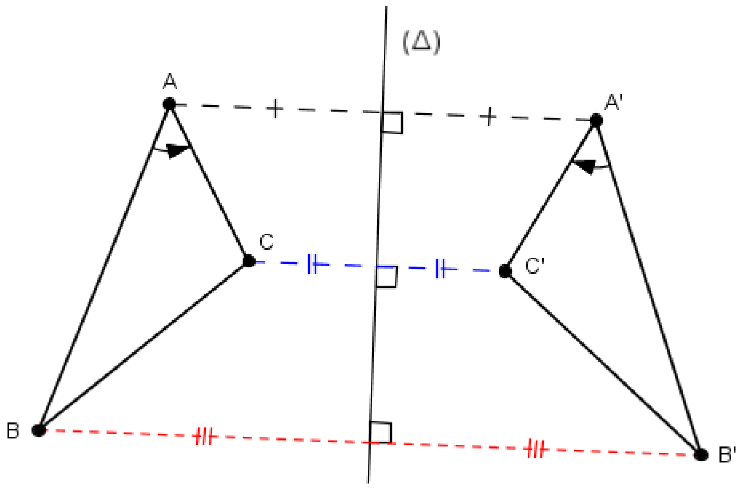
2.5 La réflexion

2.5.1 Définition et propriétés

Définition 5 : Une réflexion S d'axe (Δ) est une transformation définie par :

$$M \xrightarrow{S} M' \quad \text{tel que } (\Delta) \text{ est la médiatrice de } [MM']$$

Exemple : Image d'un triangle



ABC est direct et $A'B'C'$ indirect

Propriétés :

➪ La réflexion possède une droite où tous les points sont invariants : son axe.

- La réflexion inverse les angles orientés. C'est un antidéplacement.
- L'image (D') d'une droite (D) est une droite telle que :
  1) $(D') = (D)$ si $(D) = (\Delta)$ ou si $(D) \perp (\Delta)$
  2) $(D') // (D)$ si $(D) // (\Delta)$.
  3) (Δ) est la bissectrice de l'angle formé par les droite (D) et (D') dans les autres cas.
- La réflexion réciproque est elle-même. (transformation involutive)

2.5.2 Fonction complexe associée

Nous admettrons provisoirement que la fonction complexe associée à une réflexion est de la forme :

$$z' = e^{i\theta}\,\overline{z} + b$$

On détermine l'axe de rotation en résolvant l'équation au point fixe.

2.6 L'homothétie

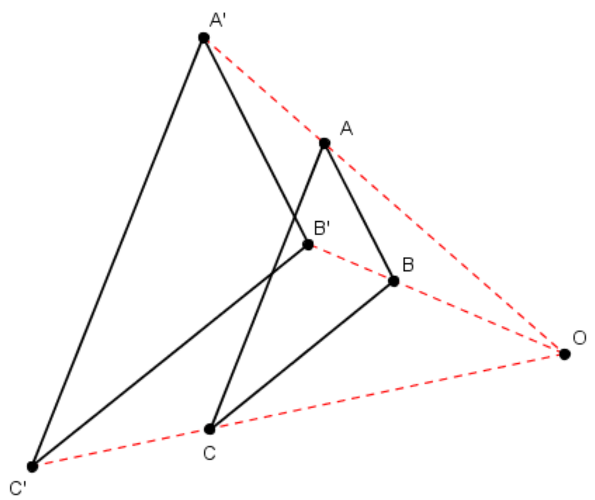
2.6.1 Définition et propriétés

Définition 6 : Une homothétie h de centre Ω et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$) est une transformation définie par :

$$M \xrightarrow{h} M' \quad \text{tel que :} \quad \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$$

Remarque : k peut être négatif

Exemple : Image d'un triangle ($k = 1,5$)



Propriétés :

- L'homothétie est une transformation qui agrandi les figures si $|k| > 1$ et qui les réduit si $|k| < 1$. Les distances sont multipliées par $|k|$
- Pour tous point A et B, on a : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$

- ➪ L'homothétie n'est pas une isométrie. Elle ne conserve ni les distances ni les aires, mais conserve les autres propriétés des isométries.
- ➪ Une homothétie possède un point invariant : son centre.
- ➪ L'aire d'une figure par une homothétie est multipliée par k^2.
- ➪ Une homothétie de centre Ω et de rapport $k = -1$ est une symétrie de centre Ω
- ➪ L'image (D') d'une droite (D) est une droite telle que :

  1) $(D') = (D)$ si Ω est sur (D).

  2) $(D')//(D)$ si Ω n'est pas sur (D).

2.6.2 Fonction complexe associée

Soit l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k. L'image $M'(z')$ du point $M(z)$ par l'homothétie h, verifie :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega M'} &= k\,\overrightarrow{\Omega M} \\ z' - \omega &= k(z - \omega) \\ z' &= k\,z + \omega - k\omega \end{aligned}$$

En posant $b = \omega - k\omega$, on obtient :

$$z' = k\,z + b$$

2.6.3 Exemple

Soit la fonction complexe définie par :

$$z' = 3z + 4 + 2i$$

Identifier la transformation puis déterminer ses caractéristiques.

Comme la fonction complexe est du type $z' = k\,z + b$ avec $k \in \mathbb{R}^*$, la transformation est une homothétie de rapport 3.

Déterminons l'affixe ω du centre Ω, en résolvant l'équation au point fixe :

$$\begin{aligned} \omega &= 3\omega + 4 + 2i \\ -2\omega &= 4 + 2i \\ \omega &= -2 - i \end{aligned}$$

Conclusion : La transformation est une homothetie de rapport 3 et de centre $\Omega(-2 - i)$.

3 Similitude

3.1 Définition

Définition 7 : Une similitude est une transformation qui multiplie les distances par un réel positif ou qui conserve le rapport des distances. Si M', A' et B' sont les images respectives de M, A et B, on a :

$$A'B' = k \times AB \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{R}_+^* \qquad \text{ou} \qquad \frac{A'M'}{AM} = \frac{B'M'}{BM}$$

3.2 Conséquences

Propriété 2 : On peut vérifier facilement que :

1) Les transformations élémentaires sont des similitudes.
2) L'identité est une similitude.
3) Une isométrie est une similitude de rapport 1.
4) La composée de deux similitudes de rapports respectifs k_1 et k_2 est une similitude de rapport $k_1 \times k_2$
5) La réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$.
6) Toute similitude de rapport k est la composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie. (*voir démonstration ci-dessous*)

Démonstration : (*propriété 6*) Soit s une similitude de rapport k et h une homothétie de rapport $\dfrac{1}{k}$. La composée de cette similitude et de cette homothétie est donc une isométrie i car $k \times \dfrac{1}{k} = 1$. On peut donc écrire :

$$s \circ h = i$$

En composant à gauche par l'homothétie réciproque h^{-1}, on a :

$$s \circ h \circ h^{-1} = i \circ h^{-1}$$

or $\quad h \circ h^{-1} = Id, \quad$ donc :

$$s = i \circ h^{-1}$$

or h^{-1} est bien une homothétie de rapport k.

3.3 Propriétés

3.3.1 Le produit scalaire

Propriété 3 : Dans une similitude de rapport k, le produit scalaire est multiplié par k^2

$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = k^2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Pour le démontrer, on utilise le fait que $BC^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2$ et que $B'C'^2 = k^2 BC^2$.

3.3.2 Les angles géométriques

Propriété 4 : Une similitude conserve les angles géométriques :

$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$$

Pour le démontrer, on utilise le produit scalaire, de l'égalité de deux cosinus, on en déduit l'égalité des angles géométriques.

3.3.3 Repère orthogonal

Propriété 5 : Un repère orthogonal se transforme par une similitude en un repère orthogonal, c'est à dire qu'un triangle rectangle isocèle se transforme en un triangle rectangle isocèle.

3.3.4 Conséquences

Propriété 6 : Une similitude transforme une droite en droite, un cercle en cercle. Une similitude conserve les angles géométriques, le parallélisme, l'orthogonalité, l'alignement, le contact, le barycentre et multiplie les aires par le carré de son rapport.

4 Écriture complexe d'une similitude

4.1 Similitude et triangle

Théorème 1 : Soit ABC un triangle, il n'existe qu'une seule similitude s telle $s(A) = A'$, $s(B) = B'$ et $s(C) = C'$.

Démonstration : Supposons qu'il existe deux similitude s et s' de rapport k et k' telle que :

$$\begin{aligned} s(A) &= s'(A) = A' \\ s(B) &= s'(B) = B' \\ s(C) &= s'(C) = C' \end{aligned}$$

Les similitudes s et s' sont nécessairement de même rapport car :

$$\left.\begin{array}{l} \text{de la similitude } s\text{, on a : } A'B' = kAB \\ \text{de la similitude } s'\text{, on a : } A'B' = k'AB \end{array}\right\} \text{ donc } \quad k = k'$$

Si les similitudes sont différentes alors pour un point M quelconque on a :

$$s(M) = M'_1 \quad \text{et} \quad s'(M) = M'_2 \qquad \text{avec} \quad M'_1 \neq M'_2$$

Comme les similitudes sont de même rapport, on en déduit que :

$$\begin{array}{ll} A'M'_1 = A'M'_2 & \text{donc } A' \text{ est sur la médiatrice de } [M'_1M'_2] \\ B'M'_1 = B'M'_2 & \text{donc } B' \text{ est sur la médiatrice de } [M'_1M'_2] \\ C'M'_1 = C'M'_2 & \text{donc } C' \text{ est sur la médiatrice de } [M'_1M'_2] \end{array}$$

Comme les points A, B et C ne sont pas alignés, il en est de même des points A', B' et C'. Or les points A', B' et C' sont sur la médiatrice de $[M'_1M'_2]$. Contradiction. Donc :

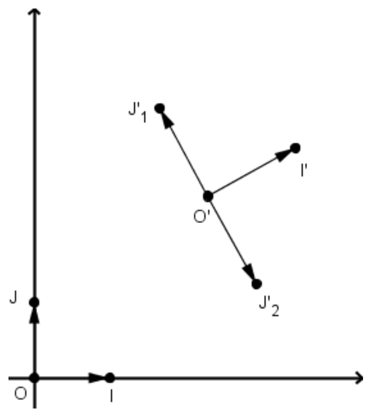
$$\forall M \quad s(M) = s'(M) \quad \text{donc} \quad s = s'$$

4.2 Écriture complexe d'une similitude

Théorème 2 : Les similitudes sont des transformations dont l'écriture complexe est de la forme : (avec $a \neq 0$)

$$z' = az + b \qquad \text{ou} \qquad z' = a\bar{z} + b$$

Démonstration : Soit un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Les affixes respectifs de O, I et J sont donc : 0, 1 et i.



Soit $s(O) = O'$, $s(I) = I'$ et $s(J) = J'$.

OIJ est un triangle rectangle isocèle direct en O donc $O'I'J'$ est un triangle rectangle isocèle direct ou indirect en O'.

Donc d'après la figure ci-contre J' est en J'_1 ou en J'_2.

Appelons α et β les affixe respectives de O' et I'.

Si $J = J'_1$, alors J'_1 est l'image de I' par le quart de tour direct de centre O' donc :

$$z_{J'_1} - \alpha = i(\beta - \alpha)$$

Soit s d'écriture complexe $z' = (\beta - \alpha)z + \alpha$. Les images respectives de O, I et J sont alors O', I' et J'. D'après le théorème précédent la similitude est entièrement définie. On a alors : $a = \beta - \alpha$ et $b = \alpha$

Si $J = J'_2$, alors J'_2 est l'image de I' par le quart de tour indirect de centre O' donc :

$$z_{J'_1} - \alpha = -i(\beta - \alpha)$$

Soit s d'écriture complexe $z' = (\beta - \alpha)\bar{z} + \alpha$. Les images respectives de O, I et J sont alors O', I' et J'. D'après le théorème précédent la similitude est entièrement définie. On a alors $a = \beta - \alpha$ et $b = \alpha$

Réciproquement :

- Si $z' = az + b$ alors :

$$\left.\begin{aligned} z'_A &= az_A + b \\ z'_B &= az_B + b \end{aligned}\right\} \quad \text{donc} \quad A'B' = |z'_B - z'_A| = |a(z_B - z_A)| = |a|AB$$

C'est donc une similitude de rapport $|a|$

- Si $z' = a\bar{z} + b$ alors :

$$\left.\begin{aligned} z'_A &= a\overline{z_A} + b \\ z'_B &= a\overline{z_B} + b \end{aligned}\right\} \quad \text{donc} \quad A'B' = |\overline{z'_B} - \overline{z'_A}| = |a(\overline{z_B} - \overline{z_A})| = |a||\overline{z_B - z_A}| = |a|AB$$

C'est donc une similitude de rapport $|a|$

5 Similitudes directes et indirectes

5.1 Définitions

Définition 8 : Une similitude directe est une similitude qui conserve les angles orientée. Son écriture complexe est de la forme : (avec $a \neq 0$)

$$z' = az + b$$

Une similitude indirecte est une similitude qui tranforme les angles orientés en leurs opposés. Son écriture complexe est de la forme : (avec $a \neq 0$)

$$z' = a\bar{z} + b$$

Démonstration : Soit trois points quelconques A, B, C et leurs images associées A', B', C'. Calculons l'angle $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ à l'aide de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ avec les deux écritures complexes.

1) Si $z' = az + b$ alors on a :

$$\begin{cases} z'_C - z'_A = az_C + b - az_A - b = a(z_C - z_A) \\ z'_B - z'_A = az_B + b - az_A - b = a(z_B - z_A) \end{cases} \quad \text{donc}$$

$$\frac{z'_C - z'_A}{z'_B - z'_A} = \frac{a(z_C - z_A)}{a(z_B - z_A)} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \qquad \text{car } a \neq 0$$

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = \arg\left(\frac{z'_C - z'_A}{z'_B - z'_A}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

Cette écriture conserve donc bien les angles orientés

2) Si $z' = a\overline{z} + b$ alors on a :

$$\begin{cases} z'_C - z'_A = a\overline{z_C} + b - a\overline{z_A} - b = a(\overline{z_C} - \overline{z_A}) = a\overline{(z_C - z_A)} \\ z'_B - z'_A = a\overline{z_B} + b - a\overline{z_A} - b = a(\overline{z_B} - \overline{z_A}) = a\overline{(z_B - z_A)} \end{cases} \quad \text{donc}$$

$$\frac{z'_C - z'_A}{z'_B - z'_A} = \frac{a\overline{(z_C - z_A)}}{a\overline{(z_B - z_A)}} = \overline{\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)} \qquad \text{car } a \neq 0$$

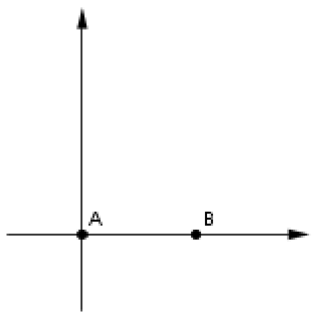
$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = \arg\left(\frac{z'_C - z'_A}{z'_B - z'_A}\right) = \arg\overline{\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)} = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

Cette écriture transforme donc les angles orientés en leurs opposés.

5.2 Théorème

Théorème 3 : Toute similitude qui fixe deux points distincts A et B est soit l'identité, soit la reflexion d'axe (AB).

Démonstration :



On appelle s la similitude. On prend comme origine du repère le point A et comme axe des abscisses la droite (AB).

L'affixe du point A est donc nul ($z_A = 0$) et l'affixe du point B réel ($z_B = x_B$)

Si les point A et B sont fixes alors $s(A) = A$ et $s(B) = B$

1) Si $z' = az + b$, de $s(A) = A$ et $s(B) = B$, on obtient :

$$\begin{cases} z_A = az_A + b \\ z_B = az_B + b \end{cases} \quad \text{comme } z_A = 0 \text{, on a :} \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

qui n'est autre que l'identité.

2) Si $z' = a\bar{z} + b$, de $s(A) = A$ et $s(B) = B$, on obtient :

$$\begin{cases} z_A = a\overline{z_A} + b \\ z_B = a\overline{z_B} + b \end{cases} \quad \text{comme } z_A = 0 \text{ et } z_B = x_B \text{, on a :} \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Ce qui donne $z' = \bar{z}$ qui n'est autre que la symétrie par rapport à l'axe des abscisses soit ici (AB)

Remarque : Une similitide qui fixe trois points non alignés est l'identité.

6 Similitudes directes

6.1 Propriétés d'une similitude directe

Propriété 7 : L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme : $z' = az + b$.

1. Si $a = 1$ la similitude est une translation.
2. Si $a \neq 1$ la similitude admet un seul point fixe Ω. Cette similitude est alors la composée dans un ordre indiférent d'une homothétie de rapport $k = |a|$ de centre Ω et d'une rotation de même centre et d'angle $\theta = \arg(a)$. Si ω est l'affixe de Ω, on a alors :

$$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$$

Dans la pratique, à l'aide de l'expression $z' = az + b$, on a :
- ➪ $k = |a|$
- ➪ $\theta = \arg(a)$
- ➪ Pour déterminer l'affixe ω du centre Ω, on résout l'équation au point fixe :

$$\omega = a\omega + b$$

Exemple : Éléments caractéristiques de la similitude directe d'écriture complexe :

$$z' = (-2 + 2i)z + 5 + i$$

On obtient donc :

➪ $k = |-2 + 2i| = 2|1 + i| = 2\sqrt{2}$

➪ on a alors $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient donc $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$

➪ on résout l'équation au point fixe pour obtenir le centre :

$$\begin{aligned}
\omega &= (-2+2i)\omega + 5 + i \\
\omega(1+2-2i) &= 5+i \\
\omega(3-2i) &= 5+i \\
\omega &= \frac{5+i}{3-2i} \\
&= \frac{(5+i)(3+2i)}{9+4} \\
&= \frac{15+10i+3i-2}{13} \\
&= \frac{13+13i}{13} \\
&= 1+i
\end{aligned}$$

la similitude est de rapport $2\sqrt{2}$ d'angle $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ et de centre $\Omega(1+i)$.

6.2 Comment définir une similitude directe ?

Une similitude directe de centre Ω est définie par : un point, son image et le centre Ω.

6.2.1 Théorème

Théorème 4 : Deux points distincts A et B et leurs images distinctes A' et B' définissent une unique similitude directe. On a alors :

$$k = \frac{A'B'}{AB} \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta \quad (2\pi)$$

Démonstration : Soit z_A, z_B, $z_{A'}$ et $z_{B'}$ les affixes respectives des points A, B, A' et B'.

Soit s une similitude directe, donc son écriture complexe est de la forme : a et b étant non nul

$$z' = az + b$$

Montrer l'existence et l'unicité de s revient à déterminer les deux nombres complexes a et b.

comme $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$, on a alors le système suivant :

$$\begin{cases} z_{A'} = az_A + b & (1) \\ z_{B'} = az_B + b & (2) \end{cases}$$

de $(2)-(1)$, on obtient $a(z_B - z_A) = z_{B'} - z_{A'}$, d'ou comme $A \neq B$:

$$a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$$

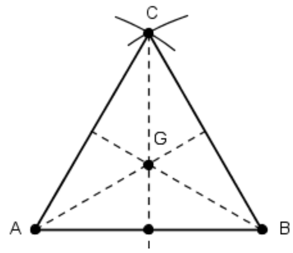
On remarquera que a est non nul car : $A' \neq B'$.

a étant ainsi défini, on obtient b par exemple avec la première équation :

$$b = z_{A'} - az_A$$

6.3 Figures clés de la similitude

De par leurs angles remarquables, le triangle équilatéral et le triangle rectangle isocèle ou le carré suggèrent l'utilisation d'une similitude directe. Ce sont donc les figures clés de la similitude directe.



Exemple : ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité G. I est le milieu de $[AB]$. Pour chacune des similitudes directes suivantes préciser son rapport et son angle.

1) s_1 a pour centre B et $s_1(I) = C$

   On obtient alors pour rapport et angle :

$$k = \frac{BC}{BI} = 2 \qquad \text{et} \qquad \theta = -\frac{\pi}{3}$$

2) s_2 a pour centre I et $s_2(A) = C$

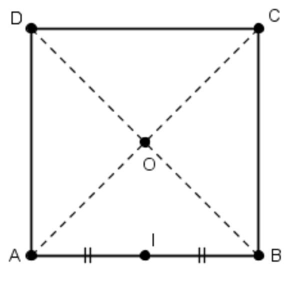
   On obtient alors pour rapport et angle :

$$k = \frac{IC}{IA} = \frac{\sqrt{3}\,AB}{2} \times \frac{2}{AB} = \sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad \theta = -\frac{\pi}{2}$$

3) s_3 a pour centre A et $s_3(G) = C$

   On obtient alors pour rapport et angle :

$$k = \frac{AC}{AG} = \frac{AC}{\dfrac{2}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}\,AC}{2}} = \sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{\pi}{6}$$



Exemple : $ABCD$ est un carré direct. O est le centre de $ABCD$ et I le milieu de $[AB]$. Pour chacune des similitudes directes préciser son rapport et son angle.

1) s_1 a pour centre C et $s_1(A) = B$

   On obtient alors pour rapport et angle :

$$k = \frac{CB}{CA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

2) s_2 a pour centre O et $s_2(I) = C$

   On obtient alors pour rapport et angle :

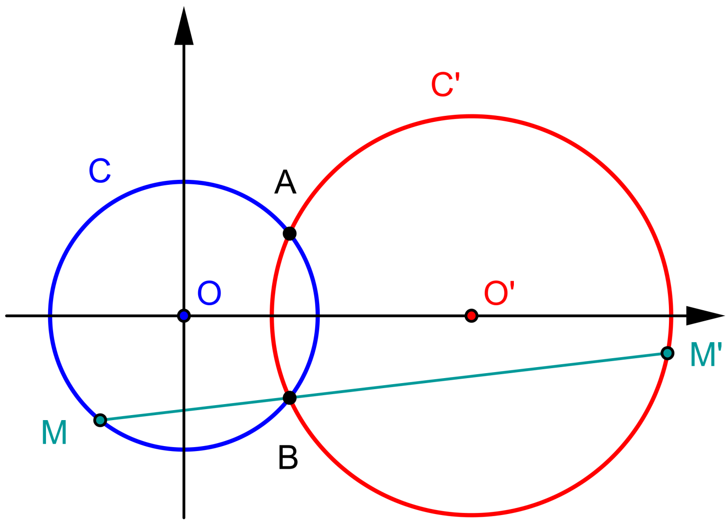
$$k = \frac{OC}{OI} = \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

7 Configuration de cercles sécants

7.1 Théorème

Théorème 5 : Soient $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ deux cercles de centres respectifs O et O' sécants en A et B. Soit S la similitude directe de centre A qui transforme O en O'. Soit M un point sur le cercle $(\mathscr{C})$ et M' son image par S alors les points M, B et M' sont alignés.

Démonstration : On a donc la configuration suivante :



D'après les hypothèses, l'image du cercle (C) est (C'). M' est donc un point de (C') d'après les propriété des similitudes directes.

Prenons le repère orthonormal d'origine O et d'axe réel (OO'). Nous avons alors :

1) L'affixe de O' est ω qui est réel car O' est situé sur (OO').

2) On appelle a l'affixe de A, l'affixe de B est alors $\bar{a}$. On montre aisement que (OO') est la médiatrice de $[AB]$. B est alors le symétrique de A par rapport à (OO').

3) On appelle z et z' les affixes respectives de M et M'.

4) Comme A et M sont sur le cercle (C), on a donc $OA = OM$, donc $a\bar{a} = z\bar{z}$.

5) Comme $S(A) = A$ et $S(O) = O'$, on en déduit que : $z' = \left(1 - \dfrac{\omega}{a}\right) z + \omega$.

6) Les affixes respectives de $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont $z - \bar{a}$ et $z' - \bar{a}$.

Calculons alors l'angle $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}\right)$

$$\begin{aligned}
\frac{z'-\bar{a}}{z-\bar{a}} &= \frac{1-\dfrac{\omega}{a}}{z-\bar{a}} \\
&= 1+\frac{-\dfrac{\omega}{a}z+\omega}{z-\bar{a}} \\
&= 1+\omega\,\frac{1-\dfrac{z}{a}}{z-\bar{a}} \\
&= 1+\omega\,\frac{\left(1-\dfrac{z}{a}\right)(\bar{z}-a)}{|z-\bar{a}|^2} \\
&= 1+\omega\,\frac{\bar{z}-a-\dfrac{z\bar{z}}{a}+z}{|z-\bar{a}|^2}
\end{aligned}$$

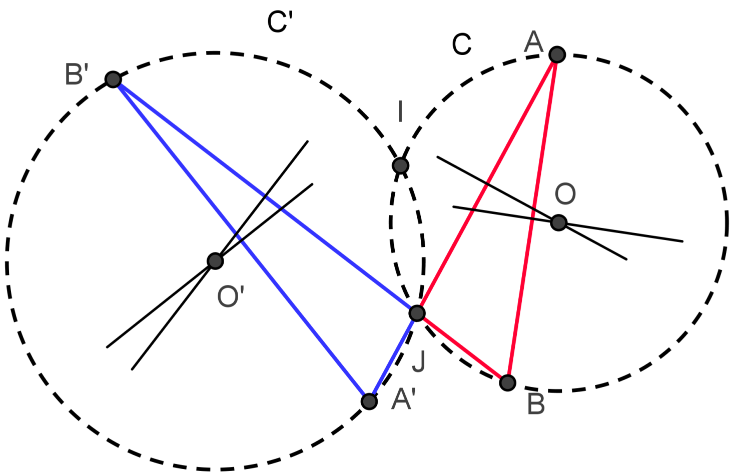
comme $a\bar{a}=z\bar{z}$, on a :

$$= 1+\omega\,\frac{(z+\bar{z})-(a+\bar{a})}{|z-\bar{a}|^2}$$

Le rapport est réel donc les points B, M et M' sont alignés.

7.2 Application

On donne deux points distincts A et B et leurs images distinctes respectives A' et B' par une similitude directes S. Construire le centre de la similitude.



La construction consiste à retrouver la configuration des cercles sécants. On obtient alors le programme de construction suivant :

- On détermine l'intersection J des droites (AA') et (BB'). Si les droite (AA') et (BB') sont parallèles, il faut utiliser une autre construction.
- On détermine les cercles circonscrits C et C' des triangles respectifs ABJ et $A'B'J$ en traçant les médiatrices.
- Si les deux cercles C et C' se recoupent en un point I, alors d'après la configuration des cercles sécants, I est le centre de la similitude directe S. Si les deux cercles C et C' sont tangents, nous sommes dans une configuration de Thalès, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires, la similitude S est alors une homothétie de centre J.