

Contrôle de mathématiques

Jeudi 14 novembre 2024

EXERCICE 1

Vrai-Faux

(4 points)

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en vous justifiant.

- 1) Soit $A(4 + i)$, $B(-1 - i)$ et $C(6 - 4i)$

Proposition 1 : Le triangle ABC est isocèle rectangle.

- 2) **Proposition 2 :** Si $z \in \mathbb{U}$, alors $z^2 + \frac{1}{z^2} \in \mathbb{R}$

- 3) **Proposition 3 :** Le nombre $(\sqrt{3} + i)^{2025}$ est un nombre réel.

- 4) Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z - 1| = |z + i|$

Proposition 4 : L'ensemble (E) est une droite passant par l'origine.

EXERCICE 2

Forme exponentielle

(2 points)

- 1) Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants : $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i$

- 2) En déduire la forme algébrique de $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{10}$

EXERCICE 3

Formules d'Euler

(2 points)

À l'aide des formules d'Euler, montrer que pour tout réel x , on a :

$$\cos x \sin^2 x = \frac{-\cos 3x + \cos x}{4}$$

EXERCICE 4

Racine cubique de l'unité

(2 points)

- 1) Développer $(1 + i)^3$

- 2) En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de : $z^3 = -2 + 2i$

EXERCICE 5

Ensemble de points

(10 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-iz - 2}{z + 1}$$

Soit A, B et C les points d'affixes respectives $a = -1$, $b = 2i$ et $c = -i$.

- 1) Soit C' l'image du point C par f . Donner l'affixe c' du point C sous forme algébrique.

- 2) Calculer l'affixe d du point D ayant pour image par f le point D' d'affixe $d' = \frac{1}{2}$.
- 3) Pour tout complexe $z \neq -1$, on note p le module $|z + 1|$ et p' le module de $|z' + i|$.
 - a) Démontrer que, pour tout nombre complexe $z \neq -1$, on a : $pp' = \sqrt{5}$.
 - b) Si le point M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2, montrer qu'alors $M' = f(M)$ appartient à un cercle (Γ') , dont on précisera le centre et le rayon.
- 4) Pour tout complexe $z \neq -1$, on considère le nombre complexe $\omega = \frac{z - 2i}{z + 1}$.
 - a) Montrer que $z' = -i\omega$.
 - b) Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z telle que z' soit un réel non nul.
 - c) Vérifier que le point D appartient aux ensembles (Γ) et (F).
- 5) Représenter les ensembles (Γ) , (F) et (Γ') en prenant 2 cm pour unité graphique.