

Les nombres complexes

Le point de vue géométrique

Angle orienté et mesure principale

EXERCICE 1

Tracer un cercle trigonométrique puis placer les points des angles suivants :

$$\bullet \pi \quad \bullet \frac{\pi}{4} \quad \bullet \frac{3\pi}{2} \quad \bullet \frac{\pi}{6} \quad \bullet -\frac{\pi}{3} \quad \bullet -\frac{3\pi}{4} \quad \bullet \frac{5\pi}{6} \quad \bullet -\frac{3\pi}{2}$$

EXERCICE 2

Déterminer la mesure principale correspondant aux angles α suivants :

$$1) \alpha = \frac{7\pi}{2} \quad 2) \alpha = -\frac{4\pi}{3} \quad 3) \alpha = \frac{35\pi}{6} \quad 4) \alpha = -\frac{21\pi}{4} \quad 5) \alpha = \frac{202\pi}{3}$$

EXERCICE 3

Placer puis déterminer les valeurs du cosinus et sinus des angles suivants :

$$1) \frac{\pi}{6} \quad 2) \frac{5\pi}{6} \quad 3) \frac{7\pi}{6} \quad 4) \frac{11\pi}{6} \quad 5) \frac{13\pi}{6}$$

EXERCICE 4

Placer puis déterminer les valeurs du cosinus et sinus des angles suivants :

$$1) \frac{\pi}{4} \quad 2) \frac{9\pi}{4} \quad 3) \frac{5\pi}{4} \quad 4) \frac{81\pi}{4} \quad 5) -\frac{108\pi}{4}$$

EXERCICE 5

Placer puis déterminer les valeurs du cosinus et sinus des angles suivants :

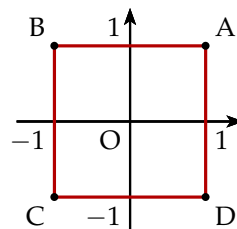
$$1) \frac{4\pi}{3} \quad 2) \frac{\pi}{3} \quad 3) \frac{71\pi}{3} \quad 4) \frac{97\pi}{3} \quad 5) -\frac{54\pi}{3}$$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

EXERCICE 6

Dans le repère orthonormal direct, on a représenté le carré ABCD ci-contre.

Donner l'affixe et un argument de chacun des sommets du carré ABCD



EXERCICE 7

Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

- | | | |
|----------------------------------|---|--------------------------|
| 1) $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$ | 3) $z_3 = 4 - 4i$ | 5) $z_5 = -2i$ |
| 2) $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ | 4) $z_4 = -\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}$ | 6) $z_6 = \frac{4}{1-i}$ |

EXERCICE 8

À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée en degré à 10^{-2} près d'un argument de chacun des nombres complexes suivants :

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1) $z = 4 - 3i$ | 2) $z = 1 + 2i$ | 3) $z = -2 + i$ |
|-----------------|-----------------|-----------------|

EXERCICE 9

Trouver une forme trigonométrique, en utilisant les opérations sur les modules et arguments de chacun des nombres complexes suivants :

- | | | |
|--------------------|--------------------------------------|--|
| 1) $z = (1 - i)^6$ | 2) $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$ | 3) $z = \frac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^{12}}$ |
|--------------------|--------------------------------------|--|

EXERCICE 10

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

- Donner le module et un argument de z_1 , z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$
- Donner la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$
- En déduire que : $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Forme exponentielle**EXERCICE 11**

Donner une forme exponentielle de chacun des complexes suivants :

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|---|
| 1) $z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$ | 2) $z_2 = (1 + i\sqrt{3})^4$ | 3) $z_3 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} \right)$ |
|---------------------------|------------------------------|---|

EXERCICE 12

Dans chacun des cas suivants, écrire z sous la forme exponentielle et en déduire la forme algébrique de $\bar{z}$ et $\frac{1}{z}$.

- | | | |
|--------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 1) $z_1 = \frac{6}{1+i}$ | 2) $z_2 = 3i e^{i\frac{\pi}{3}}$ | 3) $z_3 = -12e^{i\frac{\pi}{4}}$ |
|--------------------------|----------------------------------|----------------------------------|

EXERCICE 13

- a) Exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$ à l'aide de la formule de Moivre et du développement de $(a + b)^3$.

b) En déduire que : $\cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4}$ et $\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$.

2) Retrouver ces deux formules à l'aide des formules d'Euler.

Ensemble de points

EXERCICE 14

Déterminer et construire les ensembles Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 des points dont l'affixe z vérifie la condition proposée.

1) $z = 3e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [0; 2\pi[$ 2) $z = r e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec $r \in [0; +\infty[$

3) $z = k e^{-i\frac{\pi}{3}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

EXERCICE 15

A et B ont pour affixes respectives 1 et $3 + 2i$.

Déterminer puis construire les ensembles Γ_1 et Γ_2 , ensemble des points M dont l'affixe z satisfait les conditions suivantes :

1) $|z - 1| = |z - (3 + 2i)|$ 2) $|z - (3 + 2i)| = 1$

Triangle

EXERCICE 16

Soit les points A(a), B(b) et C(c) tels que : $a = 1 + \frac{3}{4}i$, $b = 2 - \frac{5}{4}i$, $c = 3 + \frac{7}{4}i$.

- 1) Placer les points A, B et C.
- 2) Quelle est la nature du triangle ABC ?
- 3) Calculer l'affixe de A' tel que ABA'C soit un carré.

EXERCICE 17

Soit le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit les points A(a), B(b) et C(c) tels que : $a = -2 + 2i$, $b = -3 - 6i$ et $c = 1$.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

Applications dans $\mathbb{C}$

EXERCICE 18

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f l'application définie dans $\mathbb{C} - \{-2i\}$ par : $f(z) = \frac{z - 2 + i}{z + 2i}$.

- 1) On pose $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de x et de y puis montrer que :

$$\operatorname{Re}[f(z)] = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}[f(z)] = \frac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y + 2)^2}$$

⚠ Soyez patient et méthodique !

2) En déduire la nature de :

- l'ensemble E des points M d'affixe z du plan, tels que $f(z)$ soit un réel ;
- l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur ou éventuellement nul.
- Représenter ces deux ensembles.

EXERCICE 19

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit le point A d'affixe $1 + i$.

À tout point M(z) avec $z \neq 0$, on associe le point M'(z') tel que : $z' = \frac{z - 1 - i}{z}$

Le point M' est appelé le point image du point M.

- Déterminer, l'affixe du point B', image du point B(i).
 - Montrer que, pour tout point M(z) avec $z \neq 0$, l'affixe z' du point M' est telle que $z' \neq 1$.
- Déterminer l'ensemble des points M(z) avec $z \neq 0$ tel que l'affixe du point M' est telle que $|z'| = 1$.
- Quel est l'ensemble des points M(z) avec $z \neq 0$ tel que l'affixe du point M' est un nombre réel ?

EXERCICE 20

Soit le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

L'unité graphique est 1 cm.

On réalisera une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2 - 3i$, $z_B = i$ et $z_C = 6 - i$.

Partie A

- Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.
- En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère l'application f qui, au point M(z) avec $z \neq i$, associe le point M'(z') telle que :

$$z' = \frac{i(z - 2 + 3i)}{z - i}$$

- Soit D($1 - i$). Déterminer l'affixe du point D' image du point D par f .
- Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par f est le point d'affixe $2i$.
 - Démontrer que E est un point de la droite (AB).
- Démontrer que, pour tout point M distinct de B, $OM' = \frac{AM}{BM}$.
- Démontrer que, pour tout point M distinct de A et du point B, on a l'égalité :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) + \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

- 5) Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- 6) Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B , alors le point M appartient à la droite (AB) .

EXERCICE 21

Soit le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

L'unité graphique est 2 cm.

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

Soit les points $A(1)$ et $B(-1)$.

Soit l'application f qui, à tout point $M(z)$ distinct de B , associe le point $M'(z')$ telle que :

$$z' = \frac{z-1}{z+1}$$

- 1) Déterminer les points invariants M de f , tels que $M = f(M)$.
- 2) a) Montrer que pour $z \neq -1$: $(z' - 1)(z + 1) = -2$.
b) En déduire pour $z \neq -1$ une relation entre :
 $|z' - 1|$ et $|z + 1|$, puis entre $\arg(z' - 1)$ et $\arg(z + 1)$.
Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
- 3) Montrer que si M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre A et de rayon 1.
- 4) Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.
a) Déterminer la forme exponentielle de $(p + 1)$.
b) Montrer que le point P appartient au cercle $\mathcal{C}$.
c) Soit Q le point d'affixe $q = -\bar{p}$ où $\bar{p}$ est le conjugué de p .
Montrer que les points A , P' et Q sont alignés dans cet ordre.
d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction à la règle et au compas de l'image P' du point P par l'application f .

Vrai-Faux

EXERCICE 22

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- 1) Soit $A(2 - 5i)$ et $B(7 - 3i)$.

Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.

- 2) Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|z - i| = |z + 2i|$.

Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.

- 3) Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.

Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.

- 4) Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 4 : Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|i + z| = 1 + |z|$.

5) Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 5 : Si $z \in \mathbb{U}$ alors $z^2 + \frac{1}{z^2} \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 23

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) **Proposition 1 :** Pour tout entier naturel n : $(1+i)^{4n} = (-4)^n$.

2) Soit (E) l'équation $(z-4)(z^2-4z+8)=0$ où $z \in \mathbb{C}$.

Proposition 2 : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

3) **Proposition 3 :** Pour tout nombre réel α , $1 + e^{2i\alpha} = 2e^{i\alpha} \cos(\alpha)$.

4) Soit A le point d'affixe $z_A = \frac{1}{2}(1+i)$ et M_n le point d'affixe $(z_A)^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Proposition 4 : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.

5) Soit $j \in \mathbb{U}$, d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

Proposition 5 : On a l'égalité : $1 + j + j^2 = 0$.

Complexes et suite

EXERCICE 24

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$

1) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2) Soit la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geq 1$.

a) Vérifier que z_1 est une solution de (E).

b) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.

c) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée ci-dessous et tracer, les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.

3) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right)$.

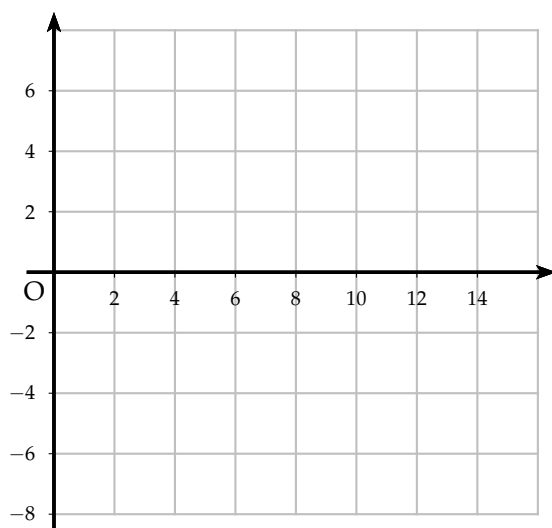
4) Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3 .

On admet que, pour tout entier $n \geq 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n \sqrt{3}$.

5) On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \dots + M_nM_{n+1}$.

a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\ell_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.

b) Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell_n \geq 1\,000$.



EXERCICE 25

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n$.
On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n .

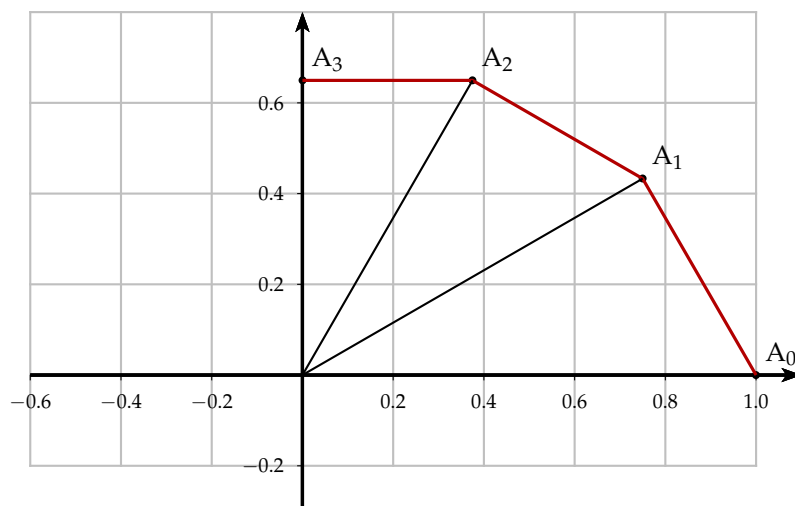
- 1) Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.
- 2) a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n .
c) Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3) Soit la fonction f en Python  suivante :

- a) Quelle est la valeur retournée pour $f(0.5)$?
- b) La valeur retournée pour $f(0.01)$ est 33.
Quel est le rôle de cette fonction f ?

```
from math import *
def f(p):
    n=0
    r=1
    while r>p:
        n=n+1
        r=sqrt(3)/2*r
    return n
```

- 4) a) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} .
b) On admet que $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est sur l'axe des ordonnées.
c) Compléter la figure suivante, en représentant les points de A_4 à A_9 . Les traits de construction seront apparents.



EXERCICE 26

Soit la suite (z_n) définie dans $\mathbb{C}$ par : $z_0 = \sqrt{3} - i$ et $z_{n+1} = (1 + i)z_n$.

Partie A

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

- 1) Calculer u_0 .
- 2) Démontrer que (u_n) est la suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- 3) Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
- 4) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Partie B

- 1) Déterminer la forme algébrique de z_1 .
- 2) Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1 + i$.
En déduire la forme exponentielle de z_1 .
- 3) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 27

On définit la suite (z_n) sur $\mathbb{C}$ par :
$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On note r_n le module du terme z_n : $r_n = |z_n|$.

Dans le plan complexe d'origine O , on considère les points A_n d'affixes z_n .

- 1) a) Calculer z_1, z_2 et z_3 .
b) Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique.
- c) Écrire le nombre complexe $\frac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.
- d) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 .

- 2) a) Démontrer que la suite (r_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 b) La suite (r_n) est-elle convergente? Interpréter géométriquement ce résultat.
- 3) On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3 , etc.

$$\text{Ainsi } L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i A_{i+1} = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \cdots + A_{n-1} A_n.$$

- a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_n A_{n+1} = r_{n+1}$.
 b) Donner une expression de L_n en fonction de n .
 c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n) .

