

Les nombres complexes

Le point de vue Algébrique

Construction des nombres complexes

EXERCICE 1

1) D est le point de coordonnées $(\sqrt{3}; 3)$. Quel est son affixe ?

2) On donne les points A, B, C d'affixes respectives :

$$z_A = \sqrt{3} + i, \quad z_B = -\sqrt{3} - i, \quad z_C = 2i$$

Calculer le module et un argument pour ces trois affixes. Que peut-on déduire pour les points A, B et C.

3) Placer les points A, B, C et D à la règle et au compas.

4) Quelle est la nature du quadrilatère AOCD. Pourquoi ?

5) Quel est l'affixe du point E tel que ODEB soit un parallélogramme ?

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée.

1) $|z| = 3$

2) $\operatorname{Re}(z) = -2$

3) $\operatorname{Im}(z) = 1$

Opérations dans \mathbb{C}

EXERCICE 3

Donner la forme algébrique des complexes suivant :

1) $z = 3 + 2i - 1 + 3i$

6) $z = (1 + i)^2$

2) $z = 6 + i - (2 + 4i)$

7) $z = (3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})$

3) $z = 12 - 3i - 4 - 5 + 8i$

8) $z = (2 - 5i)^2$

4) $z = (1 + 2i)(4 + 3i)$

9) $z = (1 + i)(2 - 3i)(1 + i)$

5) $z = (3 - i)(2 + 7i)$

10) $z = (2 + i)^2(1 - 2i)$

EXERCICE 4

Donner la forme algébrique des complexes suivants :

1) $z = \frac{1}{1 - i}$

4) $z = \frac{4 - 6i}{3 + 2i}$

7) $z = \frac{3 - 6i}{3 + i} + \frac{4}{3 - i}$

2) $z = \frac{1}{2 - i\sqrt{3}}$

5) $z = \frac{5 + 15i}{1 + 2i}$

8) $z = \left(\frac{4 - 6i}{2 - 3i}\right) \left(\frac{1 + 3i}{3 + 2i}\right)$

3) $z = \frac{1}{4 - 3i}$

6) $z = \frac{1 + 2i}{1 - 2i}$

Résolution d'équation du 1^{er} degré dans \mathbb{C}

EXERCICE 5

Résoudre les équations suivantes. Donner la solution sous forme algébrique.

1) $(1 + i)z = 3 - i$

4) $\frac{z + 1}{z - 1} = 2i$

2) $2z + 1 - i = iz + 2$

3) $(2z + 1 - i)(iz + 3) = 0$

5) $(iz + 1)(z + 3i)(z - 1 + 4i) = 0$

EXERCICE 6

Résoudre les systèmes suivants dans \mathbb{C}^2 :

1)
$$\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ -z + z' = 1 - 2i \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} z - z' = i \\ iz + z' = 1 \end{cases}$$

Complexe conjugué

EXERCICE 7

Donner la forme algébrique du conjugué \bar{z} des complexes suivants :

1) $z = 3 - 4i$

2) $z = \frac{1}{i - 1}$

3) $z = \frac{3 - i}{1 + i}$

4) $z = \frac{2i + 1}{i + 2} + \frac{1 - 2i}{2 - i}$

EXERCICE 8

Résoudre dans \mathbb{C} les équations d'inconnue z suivantes :

1) $2\bar{z} = i - 1$

2) $(2z + 1 - i)(i\bar{z} + i - 2) = 0$

3) $\frac{\bar{z} - 1}{\bar{z} + 1} = i$

EXERCICE 9

Soit $z = x + iy$ avec x et y réels ; on note Z le nombre complexe : $Z = z - 2\bar{z} + 2$.

1) Calculer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de Z .

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $Z = 0$ d'inconnue z .

EXERCICE 10

Soit $z = x + iy$ avec x et y réels.

À tout complexe z , on associe $Z = 2\bar{z} - 2 + 6i$.

1) Calculer en fonction de x et de y , les parties réelle et imaginaire de Z .

2) Existe-t-il des complexes z tels que $Z = z$?

EXERCICE 11

Dans le plan complexe, M est point d'affixe $z = x + iy$, x et y réels.

À tout complexe $z \neq 1$, on associe : $z' = \frac{5z - 2}{z - 1}$

- 1) Exprimer $z' + \bar{z}'$ en fonction de z et \bar{z} .
- 2) Démontrer que : $z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow M$ point d'un cercle privé d'un point.

EXERCICE 12

Pour tout complexe $z \neq i$, on pose : $z' = \frac{iz - 1}{z - i}$. Prouver que :

$$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$$

EXERCICE 13

Pour tout complexe $z \neq 2$, on pose : $z' = \frac{iz}{z - 2}$. Prouver que :

$$z' \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow z \text{ réel}$$

Vrai-Faux**EXERCICE 14**

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple.

- 1) Si $z + \bar{z} = 0$, alors $z = 0$.
- 2) Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.
- 3) Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.
- 4) L'équation $z^3 + z^2 + 1 - i = 0$ admet une solution réelle.

EXERCICE 15**En arithmétique**

L'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ est l'ensemble des entiers de Gauss c'est à dire les nombres complexes qui peuvent s'écrire sous la forme : $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ est stable pour l'addition et le produit, c'est à dire que la somme et le produit de deux entiers de Gauss sont des entiers de Gauss.

Équations du second degré**EXERCICE 16**

Résoudre dans \mathbb{C} , chacune des équations suivantes.

- | | |
|------------------------|---|
| 1) $2z^2 - 6z + 5 = 0$ | 4) $z^2 = z + 1$ |
| 2) $z^2 - 5z + 9 = 0$ | 5) $z^2 + 3 = 0$ |
| 3) $z^2 - 2z + 3 = 0$ | 6) $z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0$ |

EXERCICE 17

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante : $\frac{z-8}{z-3} = z$.

EXERCICE 18

- 1) Résoudre l'équation (E) : $z^2 - 2 \cos \theta z + 1 = 0$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.
- 2) Dans le plan complexe (O, \vec{u}, \vec{v}) , A et B sont les points ayant pour affixe les solutions de l'équation (E) . Quelles sont les valeurs de θ pour lesquelles le triangle OAB est équilatéral ?

EXERCICE 19

Résoudre dans \mathbb{C} le système suivant :
$$\begin{cases} z_1 z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases}$$

EXERCICE 20

Trouver les complexes p et q tels que l'équation : $z^2 + pz + q = 0$ admette pour solutions les nombres : $1 + 2i$ et $3 - 5i$

EXERCICE 21

Résoudre dans \mathbb{C} les équations bicarrées suivantes :

- 1) $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$
- 2) $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$

EXERCICE 22

Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation : $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$

Équations de degré supérieur**EXERCICE 23**

Soit l'équation : $z^3 + 3z^2 + z + 3 = 0$

- 1) Montrer que -3 est une solution de l'équation.
- 2) Résoudre alors l'équation dans \mathbb{C} .

EXERCICE 24

Soit l'équation : $z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = 0$

- 1) Trouver une racine évidente.
- 2) Résoudre alors l'équation dans \mathbb{C} .

EXERCICE 25

Soit l'équation : $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

- 1) Trouver une racine évidente.
- 2) Résoudre alors l'équation dans \mathbb{C} .

EXERCICE 26

Soit l'équation (E) : $z^3 - 18z + 35 = 0$

- 1) a) On pose la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 18x + 35$.
Démontrer que l'équation (E) possède au moins une solution réel α .
- b) On rappelle la formule de Cardan pour l'équation $x^3 + px + q = 0$.
Déterminer alors α

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

- 2) a) Factoriser : $z^3 - 18z + 35$.
- b) En déduire alors toutes les solutions de l'équation (E) dans \mathbb{C} .

EXERCICE 27

Montrer que tout polynôme à coefficients réels admet un nombre pair de racines complexes non réelles et que ces racines sont conjuguées deux à deux.

EXERCICE 28

On pose pour tout complexe z : $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$

- 1) Vérifier que : $f(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$
- 2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $f(z) = 0$

EXERCICE 29

- 1) a) Montrer que $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$
b) En déduire les solutions dans \mathbb{C} de : $z^3 - 1 = 0$.
- 2) On désigne par j le complexe : $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - a) Calculer j^2, j^3, j^{2021}
 - b) Calculer $S = 1 + j + j^2 + \dots + j^{2021}$

EXERCICE 30

On considère le polynôme : $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$

- 1) Déterminer les réels a et b tels que : $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$
- 2) Résoudre alors dans \mathbb{C} , l'équation : $P(z) = 0$

EXERCICE 31

Pour tout complexe z , on considère : $f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$

- 1) b est réel. Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaires de $f(ib)$.
- 2) En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.
- 3) Démontrer qu'il existe deux nombres réels α et β que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z ,

$$f(z) = (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

- 4) Résoudre alors dans \mathbb{C} , l'équation $f(z) = 0$

Binôme de Newton

EXERCICE 32

- 1) Remplir le triangle de Pascal jusqu'à l'ordre 7.
- 2) Proposer un programme Python  dont la fonction `pascal(n)` donne le triangle de Pascal jusqu'à l'ordre n .

EXERCICE 33

- 1) Développer $(1 - i)^4$
- 2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a la quantité $(a - i)^3$ est :
 - a) Un nombre réel?
 - b) Un imaginaire pur

EXERCICE 34

Somme des parties d'un ensemble de n éléments

En utilisant le binôme de Newton, montrer que : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

EXERCICE 35

- 1) Déterminer les racines 4-ième de l'unité.
- 2) Développer à l'aide de la formule du binôme : $(1 - 2i)^4$.
- 3) En déduire toutes les solutions dans \mathbb{C} de l'équation : $z^4 = -7 + 24i$